

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 004

Over symmetrie van matrices

A. Nijenhuis.



1952

Rapport ZW 1952-0034
over symmetrie van matrices.

6 Februari 1952.

Den Hooggeleerden Heer
Prof. Dr J.E.Verschaffelt,
Fred. Hendriklaan 3,
's-GRAVENHAGE.

AN/BB

Hooggeleerde Heer,

In overeenstemming met Uw verzoek heeft Prof. Koksma de brief d.d. 13 Januari die U hem stuurde aan mij als medewerker van de Afdeling Zuivere Wiskunde doorgegeven. Met genoegen voldoe ik aan zijn verzoek vragen te beantwoorden. Door omstandigheden is het op schrift stellen van mijn bevindingen helaas iets vertraagd.

Na bestudering van Uw brief en van de desbetreffende passage in het boek van S.R.de Groot meen ik te moeten aannemen dat Uw opmerkingen in Uw eerste probleem betrekking hebben op de pagina's 208 en 209.

Ik krijg de indruk dat de schrijver en U iets langs elkaar praten en dat juist daardoor de moeilijkheden zijn gerezen. Het zij mij daarom vergund de bedoeling van de schrijver voor U uiteen te zetten. Om de vergelijking met de tekst van het boek te vergemakkelijken, zal ik me daarom bedienen van dezelfde notatie als door schrijver gebruikt. De schrijver beweert:

Als

$$(1) \quad \sum_i J_i X_i = \sum_i J'_i X'_i,$$

waar

$$(2) \quad J_i = \sum_k L_{ik} X_k \quad L_{ik} = L_{ki},$$

$$(3) \quad J'_i = \sum_k A_{ik} J_k$$

ervolg brief aan Prof. Dr J.E.Verschaffelt, d.d. 6/2/1952

dan geldt een soortgelijke relatie

$$(4) \quad J'_i = \sum_k L'_{ik} X'_k$$

met

$$(5) \quad L'_{ik} = L'_{ki}$$

Uit Uw brief lees ik dat U aanneemt dat de schrijver met zijn bewering bedoeld zou hebben $\beta_{ik} = \beta_{ki}$; U merkt terecht op dat dat geenszins waar hoeft te zijn. Ik bewijs nu (5).

Uit (1) en (3) volgt:

$$(6) \quad X_i = \sum_k \beta_{ki} X'_k$$

substitutie van (6) in (2) en van (2) in (3) leidt tot

$$(7) \quad J'_i = \sum_k \beta_{ik} \sum_l L_{kl} \sum_m \beta_{ml} X'_m = \sum_m \left(\sum_{(k,l)} \beta_{ik} L_{kl} \beta_{ml} \right) X'_m$$

dus door vergelijken met (4) volgt:

$$(8) \quad L'_{im} = \sum_{k,l} \beta_{ik} L_{kl} \beta_{ml}$$

en hieruit volgt:

$$(9) \quad \begin{aligned} L'_{im} - L'_{mi} &= \sum_{k,l} \beta_{ik} L_{kl} \beta_{ml} - \sum_{k,l} \beta_{mk} L_{kl} \beta_{il} = \\ &= \sum_{k,l} \beta_{ik} L_{kl} \beta_{ml} - \sum_{k,l} \beta_{ml} L_{lk} \beta_{ik} = \sum_{k,l} \beta_{il} (L_{kl} - L_{lk}) \beta_{ml} = 0, \end{aligned}$$

waaruit (5) volgt.

Het tweede probleem kan inderdaad aangepakt worden met vierkantsvergelijkingen; dank zij het feit echter, dat het aantal onbekenden β_{ik} groter is dan het aantal vergelijkingen, kan vierkantsvergelijkingen omzeilen. Het probleem is de uitdrukking

$$(10) \quad \sum_{i,j} L_{ij} X_i X_j \quad L_{ij} = L_{ji}$$

Vervolg brief aan Prof. Dr J.E.Verschaffelt, d.d. 6/2/1952.

te brengen in de vorm

$$(11) \quad \sum_j b_j x'_j x'_j.$$

Dit gebeurt door splitsing in kwadraten. Een voorbeeld zij voldoende; splits:

$$(12) \quad x^2 + 12y^2 + 43z^2 + 6xy + 12xz + 7yz$$

in kwadraten. Kies

$$(13) \quad x' = x + 3y + 6z$$

dan wordt (12):

$$(14) \quad x'^2 - 9y^2 - 36z^2 + 12y^2 + 134z^2 + 7yz = x'^2 + 3y^2 + 7z^2 + 7yz.$$

zodat nu de x niet meer voorkomt. (Daarom was (13) juist zo gekozen. Behandel nu y op dezelfde wijze:

$$(15) \quad y' = y\sqrt{3} + \frac{7}{2\sqrt{3}}z,$$

dan volgt:

$$(16) \quad x'^2 + y'^2 - \left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^2 z^2 + 7z^2 = x'^2 + y'^2 + \left(7 - \frac{49}{12}\right) z^2,$$

dus

$$(17) \quad z' = z\sqrt{\frac{35}{12}}$$

De uitdrukking (12) is dus geschreven als $x'^2 + y'^2 + z'^2$, waar x', y', z' gegeven zijn door (13), (15), (17).

De splitsing is geenszins ondubbelzinnig; was men begonnen met bij voorbeeld eerst uit (12) weg te werken, dan had men gevonden:

$$(18) \quad z' = \sqrt{43} \left(z + \frac{6}{43}x + \frac{7}{86}y \right),$$

en zo voort.

Naar ik hoop zijn hiermee de lacunes en onduidelijkheden in het boek

Vervolg brief aan Prof. Dr J.E.Verschaffelt, d.d. 6/2/1952.

verholpen. Gaarne wil ik de gang van zaken verder toelichten als U dat zoudt wensen.

Met de meeste hoogachting,

Uw dw.



A.Nijenhuis.

DEN HAAG, 13 Januari 1952

Waarde collega Koksona,

Er zijn twee problemen, die ik gaarne door een mathemateicus zou zien oplossen. Het eerste is dit. Een grootheid ε is gegeven door de vergelijking

$$\varepsilon = \sum_i \{ m_i A_i \quad (i = 1 \text{ tot } n)$$

waarby

$$m_i = \sum_j a_{ij} A_j \quad (j = 1 \text{ tot } n)$$

met

$$a_{ji} = a_{ij},$$

wat zeggen wil dat de tensor a_{ij} symmetrisch is. Nu schrijf ik voor dezelfde grootheid ε

$$\varepsilon = \sum_i m'_i A'_i$$

waarin m'_i een lineaire functie is der m_j en A'_i een lineaire functie der A_j , zodat

$$m'_i = \sum_j \alpha_{ij} A'_j \quad \text{of} \quad A'_i = \sum_j \beta_{ij} m'_j.$$

Er nu wordt beweerd (theorema van Heixner), dat de tensoren α_{ij} en β_{ij} weer symmetrisch zijn. Het bewijs van Heixner werd overgenomen door S. R. de Groot in zijn boek (Thermodynamics of irreversible processes, 1951, chap. II).

Nu beweer ik, dat in dat bewijs een fout moet schuilen, want ik kan een zeer eenvoudig voorbeeld geven, waarin dat niet uitkomt.

Stel
$$\varepsilon = m_1 A_1 + m_2 A_2$$

met
$$m_1 = a_{11} A_1 \quad \text{en} \quad m_2 = a_{22} A_2$$

zodat
$$a_{12} = a_{21} = 0 \quad ; \quad \text{de tensor } a_{ij} \text{ is dus symmetrisch.}$$

Nu schrijf ik
$$\begin{aligned} \varepsilon &= a_{11} A_1^2 + a_{22} A_2^2 = \\ &= a_{11} A_1^2 + a A_1 A_2 - a A_1 A_2 + a_{22} A_2^2 = \\ &= a_{11} A_1^2 + A_1 (A_1 + \frac{a}{a_{11}} A_2) + a_{22} A_2 (A_2 - \frac{a}{a_{22}} A_1) = \\ &= m_1 A'_1 + m_2 A'_2 \end{aligned}$$

Daarom is

$$A'_1 = A_1 + \frac{a}{a_{11}} A_2 = \frac{m_1}{a_{11}} + \frac{a m_2}{a_{11} a_{22}} = \alpha_{11} m_1 + \alpha_{12} m_2$$

en

$$A'_2 = A_2 - \frac{a}{a_{22}} A_1 = \frac{m_2}{a_{22}} - \frac{a m_1}{a_{11} a_{22}} = \alpha_{21} m_1 + \alpha_{22} m_2$$

met $\alpha_{11} = -\alpha_{12}$. De tensor is hier dus antisymmetrisch.

Het tweede vraagstuk is dit. Uit ons gegeven zijnde

$$E = \sum_i (m_i \cdot A_i) \quad \text{met} \quad m_i = \sum_j \alpha_{ij} A_j$$

bewijzen dat men m'_i en A'_i zo kiezen kan, dat $m'_i = \epsilon_i A'_i$
en dus

$$\sum (m_i \cdot A_i) = \sum m'_i A'_i = \sum \epsilon_i A_i'^2$$

Het eerste vraagstuk wordt door de Grunt behandeld en oplosbaar geacht.
Volgens mij voert dat als men stelt

$$A'_i = \sum_j \alpha_{ij} A_j$$

waarby dus de α_{ij} 's ~~de~~ onbekenden zijn, tot tweede machtverhefing
waaraan men niet weet, of ze wel reële wortels hebben.

Met vriendelijke groeten

J. E. Verschaffelt.